Cap 7. Dinâmica Hamiltoniana

Mecânica no espaço de Fase

Na mecânica Lagrangiana, a configuração instantânea de um sistema descrito por coordenadas $q_1 \dots q_n$ pode ser representada como um ponto numa superfície n-dimensional, o <u>espaço de configuração</u>. A evolução temporal é vista como uma curva nesse espaço. Porém, como a config. representa apenas a posição instantânea, e não as velocidades, então uma dada config não determina a evol. futura.

Em contrapartida, sabemos que, se conhecemos em um dado instante as posições e velocidades, a evol. futura fica completamente determinada. O mesmo ocorre em geral se conhecemos as posições e seus momentos canônicos p_i.

Por def: $\boxed{p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$ → eq. exprime $p_i(q, \dot{q}, t)$

P: Quando é possível inverter essas eqs, obtendo $\dot{q}_i(q, p, t)$?

R: (sem dem.): se a matriz W c/ $W_{ij} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ satisfaz $\det W \neq 0$

então isto é possível (teo. da função implícita)

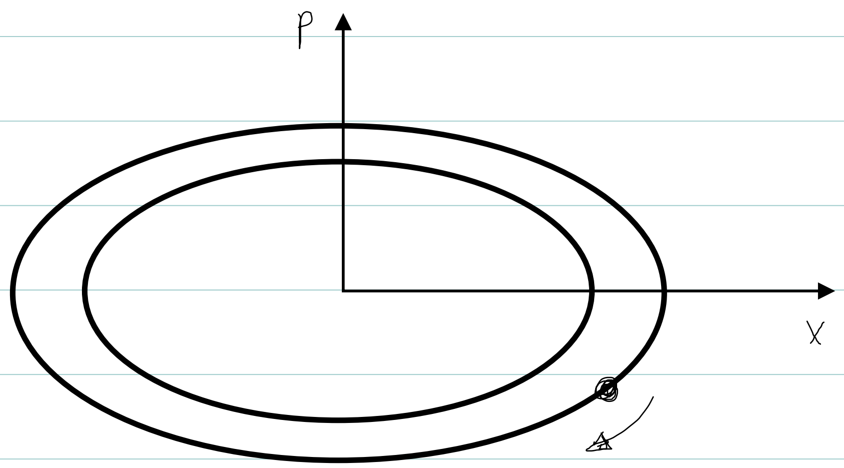
∴ Nesses casos conhecendo (q, p) ⇒ conhecemos $(q, \dot{q})$ ⇒ determinamos a evolução.

Por este motivo, é útil definir um espaço de fase $2n$-dimensional, com eixos $q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n$, e representar o estado de movimento do sistema por um ponto nesse espaço. Nesse caso, conhecendo a localização $(q(0), p(0))$ em um único instante é possível conhecer toda a evolução $(q(t), p(t))$. Em outras palavras, por cada ponto do espaço de fase passa apenas uma curva de evolução temporal – elas não se cruzam.

Ex: oscilador harmônico: $\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \\ p(t) = -A\omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \end{cases}$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$\rightarrow p = m\dot{x}$



obs: chamamos o conjunto $(q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n)$ de 'variáveis canônicas')

Idéia de W. R. Hamilton (1835): buscar uma formulação da mecânica equivalente à Lagrangiana, mas expressa em termos de variáveis canônicas

Formulação Lagrangiana	×	Formulação Hamiltoniana
• n coordenadas $q_1 \ldots q_n\ (t)$		• $2n$ coordenadas $q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n\ (t)$
• eqs. de movimento obtidas de uma função $L(q, \dot{q}, t)$ ("Lagrangiana")		• eqs. de movimento obtidas a partir de uma função $H(q, p, t)$ ("Hamiltoniana")
• n eqs. diferenciais de 2ª ordem, nas variáveis q		• $2n$ eqs. diferenciais de 1ª ordem nas variáveis (q, p)
• movimento pode ser visto como uma curva $q(t)$ no <u>espaço de configuração</u> (cada ponto do qual determina a posição instantânea de todas as partículas		• movimento pode ser visto como uma curva $(q(t), p(t))$ no <u>espaço de fase</u> $2n$-dimensional. Cada ponto no espaço de fase determina não só a posição instantânea, mas tb. <u>todas as posições futuras</u>.

Obs: Maneira trivial (e sem interesse) de obter $2n$ coordenadas.

Def: $s_i \equiv \dot{q}_i$, temos $2n$ eqs: $\begin{cases} s_i = \dot{q}_i \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial s_i}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial q_i} \end{cases}$

A formulação de Hamilton, porém, trata q's e p's em pé de igualdade, obtendo equações simétricas e com significado bem mais profundo. Para ver como, vamos assumir então que seja possível escrever $\dot{q}_i = f_i(q,p,t)$. Definimos então a <u>Hamiltoniana</u> $H(q,p,t)$ como a transformada de Legendre da Lagrangiana, passando de coordenadas $(q,\dot{q})$ p/ (q,p):

$$\boxed{H(q,p,t) \equiv \sum_j \dot{q}_j p_j - L(q_i,\dot{q}_i,t)} \quad \text{onde } \dot{q}_i = f_i(q,p,t)$$

Notando: $dH = \sum_i \cancel{p_i d\dot{q}_i} + \dot{q}_i dp_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{=\frac{d}{dt}p_i} dq_i - \underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}}_{=p_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt$

Assim, identificamos: $\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \;;\; \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i}$, $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Eqs. de Hamilton

Como "usar" essas eqs?

O caminho mais geral para descrever um sistema usando as eqs. de Hamilton é

1. Escrever a Lagrangiana em termos de coords. gen. q
2. Obter $\dot{q}_i$ em termos de (q,p,t), invertendo as eqs p/ p_i
3. Construir $H(q,p,t)$
4. Derivar H p/ obter as eqs. de Hamilton

obs: O 1º conjunto de eqs. de Hamilton corresponde justamente às inversas descritas em (2). (Ie, não é necessário reobtê-las em (4)).